Fen-Edebiyat Fakültesi	FİNAL SINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 20 Ocak 2023	

Süre 75dk. Her soru 25 puandır.

d'Alambert çözümü: $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi$

1.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0,$$

denklemini sınıflandırın ve kanonik forma dönüştürün.

Çözüm: $A = 1, B = 1, C = 5.$ $B^2 - AC = 1-5 < 0$, denklem eliptiktir.

$\lambda = \phi_x/\phi_y$ dersek karakteristik denklem $0 = A\lambda_2 + 2B\lambda + C = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ olur.

Burdan $\lambda_{1,2} = -B \pm \sqrt{B^2 - AC} = -1 \pm 2i$ çıkar.

$\lambda_1 = -1 + 2i$ için $\phi_x - \lambda_1\phi_y = 0$ denkleminden $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\lambda_1}$ ve $0 = dy + \lambda_1 dx = dy + (-1+2i)dx$ olur.

İntegre edersek $y + (-1+2i)x =$ sabit olur. Reel ve imajiner kısımlarından $\xi = y - x$, $\eta = 2x$ yazarız.

$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$ olmadığı kontrol edilebilir.

$$u_x = -u_\xi + 2u_\eta, \qquad u_{xx} = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4e_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} + 2u_{\eta\xi} \qquad u_y = u_\xi \qquad u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

Denklemde yerine yazarsak, normal formu buluruz:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

2. $z_{xx} + z_x - z_y = x^2 + y$ denkleminin özel bir çözümünü ters görüntü yöntemiyle elde edin.
(Hatırlatma: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$)

Çözüm: $F = \frac{D_x^2 + D_x}{D_y}$ yazarsak

$$z = \frac{1}{D_x^2 + D_x - D_y}(x^2+y) = \frac{-1}{D_y}\frac{1}{1-F}z = \frac{-1}{D_y}(1 + F + F^2 + \cdots)(x^2+y)$$

elde ederiz

$$F(x^2+y) = \frac{1}{D_y}(D_x^2 + D_x)(x^2+y) = \frac{1}{D_y}(2+2x) = 2y + 2xy$$
$$F^2(x^2+y) = \frac{1}{D_y^2}(D_x^2+D_x)^2(x^2+y) = \frac{1}{D_y^2}(D_x^4 + 2D_x^3 + D_x^2)(x^2+y) = \frac{1}{D_y^2}2 = \frac{1}{D_y}2y = y^2$$
$$F^n(x^2+y) = 0, \qquad \forall n \geq 3$$

Dolayısıyla

$$z = \frac{1}{D_x^2 + D_x - D_y}(x^2+y) = \frac{-1}{D_y}(x^2 + y + 2y + 2xy + y^2) = -(x^2y + \frac{3}{2}y^2 + xy^2 + \frac{y^3}{3})$$

3.

$$u_{tt} - u_{xx} = 6t - 6x$$
$$u(x,0) = x, \qquad u_t(x,0) = 1$$

başlangıç değer problemi için

$u(x,t) =$

Çözüm: Özel çözüm için operatör yöntemi: $v_{tt} - v_{xx} = 6t - 6x$ ise

$$v = \frac{1}{D_t^2 - D_x^2}(6t-6x) = 6\frac{1}{D_t^2}\frac{1}{1-(D_x^2/D_t^2)}(t-x) = 6\frac{1}{D_t^2}\left((t-x) + \frac{D_x^2}{D_t^2}(t-x) + \cdots\right)$$
$$= 6\frac{1}{D_t^2}(t-x) = 6\frac{1}{D_t}\left(\frac{t^2}{2} - xt\right) = t^3 - 3xt^2$$

Özel çözüm için kısa yöntem: $(D_t^2 - D_x^2)t^6 = 6t$ ve $v = F(t) + G(x)$, $F_{tt} = 6t$ ve, $G(x) = 6x$ şeklinde bir çözüm ararsak $F = t^3$, $G = x^3$ ve $v = t^3 + x^3$ buluruz.

Özel çözüm için uzun yöntem: $(D_t + D_x)(D_t - D_x)v = 6t - 6x$ denkleminden,

$$v_t + v_x = z, \qquad z_t - z_x = 6t - 6x$$

İkinci denklemden

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-1} = \frac{dz}{6t-6x} \implies \frac{dt-dx}{2} = \frac{1}{6}\frac{dz}{t-x} \implies 3(t-x)d(t-x) = dz \implies z = \frac{3}{2}(t-x)^2$$

Birinci denklemden

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = \frac{dv}{\frac{3}{2}(t-x)^2} \implies t - x = c_1, \qquad \frac{dv}{\frac{3}{2}c_1^2} = dt$$

$$v = \frac{3}{2}c_1^2 t = \frac{3}{2}(t-x)^2 t$$

Her üç yöntemde bulunan özel çözümlerin de farklı olduğuna dikkat edelim. Herhangi bir özel çözüm işimizi görür. Biz kısa yöntem ile bulduğumuz çözümü alalım: $v = t^3 + x^3$

Şimdi $w = u - v$ yazalım.

$$w_{tt} - w_{xx} = u_{tt} - u_{xx} - (v_{tt} - v_{xx}) = 6t - 6x - (6t - 6x) = 0$$
$$w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = x - x^3 = f(x)$$
$$w_t(x,0) = u_t(x,0) - v_t(x,0) = 1 - 0 = 1 = g(x)$$

d'Alambert çözümüne göre ($c = 1$)

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left((x+t) - (x+t)^3 + (x-t) - (x-t)^3\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 1\,d\xi$$
$$= \frac{1}{2}\left((x+t) - (x+t)^3 + (x-t) - (x-t)^3\right) + \frac{1}{2}\left((x+t) - (x-t)\right)$$

Buradan

$$u = w + v = \frac{1}{2}\left((x+t) - (x+t)^3 + (x-t) - (x-t)^3\right) + \frac{1}{2}\left((x+t) - (x-t)\right) + t^3 + x^3$$
$$= x + t - 3xt^2 + t^3$$

4.

$$X''(x) = \lambda X(x)$$
$$X(0) = X'(\pi) = 0$$

probleminin aşikar olmayan çözümlerinin olması için $\lambda \in \mathbb{R}$ hangi değerleri almalıdır? Bu λ değerleri için aşikar olmayan çözümleri belirleyin.

Çözüm: Karakteristik denklem $r^2 = \lambda$.

(i) $\lambda > 0$ için $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$, sınır koşullarını kullanırsak

$$0 = X(0) = c_1 + c_2 \implies c_2 = -c_1$$
$$0 = X'(\pi) = \sqrt{\lambda} c_1 (e^{\sqrt{\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{\lambda}\pi})$$

$(e^{\sqrt{\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{\lambda}\pi}) > 0$ ve $\sqrt{\lambda} > 0$ olduğundan $c_1 = 0$ gelir. Yani $\lambda > 0$ için sadece aşikar çözüm bulunur.

(ii) $\lambda = 0$ için $X(x) = c_1 + c_2 x$

$$0 = X(0) = c_1, \qquad 0 = X'(\pi) = c_2$$

Yine sadece aşikar çözüm gelir.

(iii) $\lambda < 0$ için $X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$

$$0 = X(0) = c_1$$
$$0 = X'(0) = \sqrt{-\lambda} c_2 \cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \implies \cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0 \implies \sqrt{-\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Yani

$$\lambda = -\left(\frac{1}{2} + n\right)^2, \qquad X(x) = c \sin\left(\frac{1}{2} + n\right) x, \qquad n \in \mathbb{N}$$